

अनुक्रमणिका

विषय / अध्याय

पृष्ठ

गणित शिक्षण शास्त्र

1. गणित की प्रकृति	1 - 14
2. गणित सीखना सिखाना एवं आकलन	15 - 41

गणित

3. दशमलव प्रणाली, संख्याएँ, भिन्न, सरलीकरण	42 - 92
4. वर्गमूल, LCM, HCF,	93 - 119
5. औसत, प्रतिशत, साधारण ब्याज, लाभ हानि	120 - 163
6. अनुपात समानुपात, समय- चाल - दूरी, कार्य एवं मजदूरी	164 - 189
7. क्षेत्रफल एवं आयतन	190 - 211

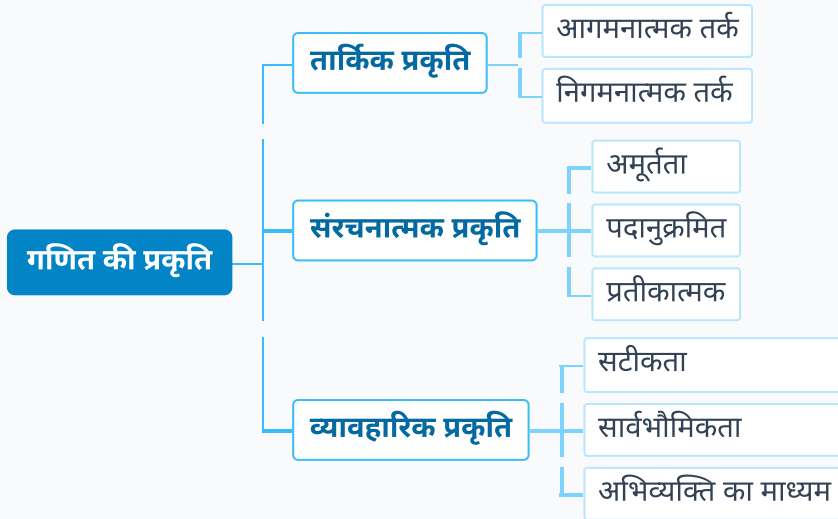
गणित की प्रकृति

(Nature of Mathematics)

भाग 1 - परिचय

गणित केवल अंकों और गणनाओं का समूह मात्र नहीं है, बल्कि यह सोचने का एक ढंग (Way of thinking) और तर्क करने की एक कला है। 'गणित' शब्द की उत्पत्ति संस्कृत के 'गण' धातु से हुई है, जिसका अर्थ है 'गणना करना'। शिक्षण शास्त्र (Pedagogy) के दृष्टिकोण से गणित की प्रकृति को समझना अनिवार्य है क्योंकि यह शिक्षण विधियों के चयन और छात्र के संज्ञानात्मक विकास को प्रभावित करती है। गणित को 'विज्ञान का द्वार एवं कुंजी' कहा जाता है।

गणित की प्रकृति का व्यापक वर्गीकरण



भाग 2 - ऐतिहासिक एवं दार्शनिक पृष्ठभूमि

गणित की परिभाषा और प्रकृति को विभिन्न विद्वानों ने अपने-अपने दृष्टिकोण से स्पष्ट किया है। ऐतिहासिक रूप से गणित को "मापन, मात्रा और दिशा" के विज्ञान के रूप में देखा गया है।

प्रमुख विद्वानों के अनुसार गणित की परिभाषाएँ

विद्वान	परिभाषा/कथन
• लॉक (Locke)	• गणित वह मार्ग है जिसके द्वारा बच्चों के मन या मस्तिष्क में तर्क (Reasoning) करने की आदत स्थापित होती है।
• गैलीलियो (Galileo)	• गणित वह भाषा है जिसमें परमेश्वर ने संपूर्ण ब्रह्मांड को लिख दिया है।
• बर्ट्रैंड रसेल (Russell)	• गणित को एक ऐसे विषय के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जिसमें हम कभी नहीं जानते कि हम किसके बारे में बात कर रहे हैं।
• हॉगबेन (Hogben)	• गणित सभ्यता और संस्कृति का दर्पण (Mirror of Civili

zation) है। बेंजामिन पियर्स | गणित ऐसा विज्ञान है जो आवश्यक निष्कर्ष (Necessary Conclusions) निकालता है।

--- जांगड़े प्रकाशन ---

भाग 3 - विस्तृत अध्ययन

गणित की प्रकृति को समझने के लिए इसके सूक्ष्म और व्यापक पहलुओं का विश्लेषण निम्नलिखित कार्ड्स के माध्यम से किया गया है:

◆ गणित की तार्किक प्रकृति (Logical Nature)

- **तार्किकता:** गणितीय विचार पूरी तरह से तर्क पर आधारित होते हैं। इसमें कल्पना या भावनाओं का कोई स्थान नहीं होता।
- **आगमनात्मक तर्क (Inductive Reasoning):** विशेष अनुभवों और उदाहरणों से सामान्य नियमों की ओर बढ़ना।
- **निगमनात्मक तर्क (Deductive Reasoning):** स्थापित सिद्धांतों और सूत्रों का उपयोग करके विशिष्ट समस्याओं को हल करना। गणित मुख्य रूप से निगमनात्मक विज्ञान माना जाता है।

◆ अमूर्तता और प्रतीकात्मकता (Abstractness & Symbolism)

- **अमूर्त से मूर्त:** गणितीय प्रत्यय (Concepts) अमूर्त होते हैं (जैसे- संख्या 5 एक विचार है), जिन्हें ठोस वस्तुओं के माध्यम से मूर्त रूप दिया जाता है।
- **स्वयं-सिद्धियां (Axioms):** गणित कुछ मान्यताओं पर आधारित है जिन्हें सिद्ध करने की आवश्यकता नहीं होती, इन्हें 'Postulates' भी कहते हैं।
- **विशिष्ट भाषा:** गणित की अपनी भाषा होती है जिसमें पद (Terms), प्रत्यय (Concepts), सूत्र (Formulae) और संकेत (Symbols) शामिल होते हैं।

◆ पदानुक्रमित संरचना (Hierarchical Structure)

- **क्रमबद्धता:** गणित के प्रत्यय एक-दूसरे से जुड़े होते हैं। आप तब तक 'गुणा' नहीं सीख सकते जब तक आपको 'जोड़' का ज्ञान न हो।
- **रेखीय एवं चक्रीय विकास:** गणित का ज्ञान सरल से कठिन (Simple to Complex) की ओर बढ़ता है।

◆ सटीकता और सार्वभौमिकता (Precision & Universality)

- **निश्चितता:** गणित के उत्तर या तो सही होते हैं या गलत। इसमें संदेह की गुंजाइश नहीं होती। ' $2 + 2 = 4$ ' भारत में भी होगा और अमेरिका में भी।
- **वस्तुनिष्ठता (Objectivity):** गणितीय निष्कर्ष व्यक्तिपरक नहीं होते, वे साक्ष्यों और नियमों पर आधारित होते हैं।

शुद्ध गणित बनाम अनुप्रयोगिक गणित

पक्ष	शुद्ध गणित (Pure Mathematics)	अनुप्रयोगिक गणित (Applied Mathematics)
• मुख्य आधार	• सिद्धांतों और सूत्रों का विकास	• सिद्धांतों का वास्तविक जीवन में उपयोग

पक्ष	शुद्ध गणित (Pure Mathematics)	अनुप्रयोगिक गणित (Applied Mathematics)
• उद्देश्य	• ज्ञान के लिए ज्ञान (अमूर्त)	• समस्याओं का समाधान (मूर्त)
• उदाहरण	• बीजगणित के मूल सिद्धांत, संख्या पद्धति	• सांख्यिकी, इंजीनियरिंग, भौतिकी में उपयोग

भाग 4 - अंतर्संबंध

गणित का अन्य विषयों के साथ गहरा संबंध है, जिसे 'सहसंबंध' (Correlation) कहा जाता है।

1. **विज्ञान के साथ:** भौतिकी, रसायन और खगोल विज्ञान बिना गणित के संभव नहीं हैं। (गणित विज्ञान की रानी है - गॉस)
2. **कला के साथ:** संगीत के सुर, चित्रकला में अनुपात (Symmetry) और वास्तुकला में ज्यामिति गणित का ही रूप है।
3. **सामाजिक अध्ययन:** जनगणना, आर्थिक सर्वेक्षण, बजट और भौगोलिक दूरियां गणितीय डेटा पर आधारित होती हैं।

ब्रह्मास्त्र तथ्य

- ✓ गणित 'अनुभवजन्य' (Empirical) नहीं बल्कि 'तार्किक-प्रतिपादक' (Logical-Deductive) विज्ञान है।
- ✓ गणित की प्रकृति 'संज्ञानात्मक' (Cognitive) होती है, जो मानसिक शक्तियों के विकास में सहायक है।
- ✓ गणित के निष्कर्ष **संदेह रहित** और **स्थायी** होते हैं।
- ✓ गणित 'आगमन' (Induction) से शुरू होकर 'निगमन' (Deduction) पर समाप्त होता है।

Exam Oriented Catch Point

- 🎯 **[बिंदु 1]:** यदि परीक्षा में पूछा जाए कि गणित की प्रकृति कैसी है और विकल्प में 'अमूर्त' और 'तार्किक' दोनों हों, तो 'तार्किक' को प्राथमिक उत्तर मानें क्योंकि तर्क ही अमूर्तता का आधार है।
- 🎯 **[बिंदु 2]:** गणित को 'खोज' माना जाए या 'आविष्कार'? गणितीय संबंधों की **खोज (Discovery)** की जाती है, जबकि उन्हें व्यक्त करने के लिए संकेतों का **आविष्कार (Invention)** किया जाता है।
- 🎯 **[बिंदु 3]:** एन.सी.एफ. (NCF 2005) के अनुसार गणित शिक्षण का मुख्य लक्ष्य बच्चे के मस्तिष्क का '**गणितिकरण (Mathematization)**' करना है।

सावधानियां

- ⚠ **[भ्रम 1]:** गणित केवल गणना का विज्ञान है? **सत्य:** नहीं, यह स्थान (Space) और परिमाण (Magnitude) का भी विज्ञान है।
- ⚠ **[भ्रम 2]:** गणित केवल प्रतिभावान छात्रों के लिए है? **सत्य:** गणित की प्रकृति सार्वभौमिक है और यह सभी के लिए अनिवार्य है (NCF 2005 के अनुसार)।
- ⚠ **[भ्रम 3]:** गणितीय भाषा जटिल होती है? **सत्य:** गणितीय भाषा अन्य भाषाओं की तुलना में अधिक संक्षिप्त, सटीक और स्पष्ट होती है।

गणित के विचार का विकसित होना

(Development of Mathematical Thinking)

गणित के विचार का विकसित होना केवल संख्याओं को सीखना नहीं है, बल्कि यह सोचने के एक विशिष्ट तरीके, तर्कशक्ति और अमूर्त विचारों को समझने की एक क्रमिक प्रक्रिया है। यह प्रक्रिया बच्चे के अनुभवजन्य संसार से शुरू होकर अमूर्त गणितीय संरचनाओं तक पहुँचती है।



♦ गणितीय सोच के विकास के चरण और सिद्धांत

गणितीय विचारों का विकास एक निश्चित पदानुक्रम का पालन करता है। मनोवैज्ञानिकों (पियाजे, ब्रूनर, वैन हीले) के अनुसार यह विकास भौतिक क्रियाओं से मानसिक अवधारणाओं की ओर बढ़ता है।



गणितीय विचारों के विकास के प्रमुख सिद्धांत/स्तर

सिद्धांतकार/मॉडल	स्तर/चरण	मुख्य विशेषता
• पियाजे (Piaget)	• संवेदी-पेशीय (0-2 वर्ष)	• वस्तु स्थायित्व और प्रारंभिक वर्गीकरण।

सिद्धांतकार/मॉडल	स्तर/चरण	मुख्य विशेषता
• पियाजे (Piaget)	• पूर्व-संक्रियात्मक (2-7 वर्ष)	• प्रतीकात्मक सोच, लेकिन संरक्षण (Conservation) का अभाव।
• पियाजे (Piaget)	• मूर्त-संक्रियात्मक (7-11 वर्ष)	• तार्किक चिंतन की शुरुआत, पलटावी गुण (Reversibility) का विकास।
• पियाजे (Piaget)	• औपचारिक-संक्रियात्मक (11+ वर्ष)	• पूर्ण अमूर्त सोच और परिकल्पनात्मक तर्क।
• ब्रूनर (Bruner)	• सक्रियता (Enactive)	• गत्यात्मक अंगों द्वारा सीखना (जैसे- वस्तुओं को गिनना)।
• ब्रूनर (Bruner)	• दृश्यात्मक (Iconic)	• मानसिक छवियों और दृश्यों द्वारा समझना।
• ब्रूनर (Bruner)	• सांकेतिक (Symbolic)	• शब्दों और प्रतीकों के माध्यम से जटिल विचार व्यक्त करना।
• वैन हीले (Van Hiele)	• ज्यामितीय चिंतन स्तर	• स्तर 0 (दृश्यीकरण) से स्तर 4 (दृढ़ता) तक ज्यामितीय समझ।

♦ गणितीय विचार के विकास की सूक्ष्म प्रक्रिया (Micro-Analysis)

◆ तार्किक विवेचन (Logical Reasoning)

- **आगमनात्मक तर्क (Inductive):** विशिष्ट उदाहरणों से सामान्य नियमों की ओर जाना। यह प्राथमिक स्तर पर विचारों के निर्माण की आधारशिला है।
- **निगमनात्मक तर्क (Deductive):** सामान्य नियमों से विशिष्ट निष्कर्ष निकालना। यह उच्च प्राथमिक और माध्यमिक स्तर पर प्रमाणों (Proofs) के लिए आवश्यक है।

◆ अमूर्तन और प्रतीकीकरण (Abstraction and Symbolism)

- **अमूर्तन:** किसी वस्तु के भौतिक गुणों को छोड़कर उसके 'गणितीय गुण' (जैसे संख्या, आकार) पर ध्यान केंद्रित करना।
- **प्रतीकीकरण:** जब बच्चा 'तीन आम' के स्थान पर केवल संख्या '3' का प्रयोग करने लगता है, तो उसका गणितीय विचार अमूर्त हो जाता है।

◆ प्रतिरूप की पहचान (Pattern Recognition)

- गणित को 'प्रतिरूपों का विज्ञान' कहा जाता है। बच्चा जब क्रम (Sequence) और आवृत्ति (Frequency) को पहचानने लगता है, तो उसमें बीजगणितीय सोच (Algebraic Thinking) का बीजारोपण होता है।

◆ वैचारिक बनाम प्रक्रियात्मक ज्ञान (Conceptual vs Procedural Knowledge)

- **वैचारिक ज्ञान:** 'क्यों' और 'कैसे' की समझ। (जैसे- भाग का अर्थ बार-बार घटाना है)।
- **प्रक्रियात्मक ज्ञान:** केवल नियमों और विधियों को याद रखना (जैसे- भाग की एल्गोरिदम जानना)। गणितीय विचार का सही विकास वैचारिक ज्ञान से ही संभव है।

♦ गणितीयकरण (Mathematization) की प्रक्रिया

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा (NCF) के अनुसार, शिक्षा का मुख्य उद्देश्य बालक की क्षमताओं का 'गणितीयकरण' करना है। इसका अर्थ है परिस्थितियों को गणितीय दृष्टिकोण से देखना।

गणितीयकरण के घटक

घटक	विवरण
• अनुमान लगाना (Estimation)	• मापन और गणना से पहले तार्किक अनुमान की शक्ति विकसित करना।
• अनुकूलन (Optimi	

zation) | किसी समस्या के सबसे प्रभावी समाधान तक पहुँचना। गणितीय मॉडलिंग | वास्तविक जीवन की समस्या को गणितीय समीकरण में बदलना। विजुअलाइजेशन | ज्यामितीय आकृतियों और स्थानिक संबंधों को मानसिक रूप से देख पाना।



ब्रह्मास्त्र तथ्य

- ✓ **NCF 2005:** गणित शिक्षण का संकीर्ण उद्देश्य 'संख्यात्मक कौशल' विकसित करना है, जबकि व्यापक उद्देश्य 'बच्चे के संसाधनों का गणितीयकरण' करना है।
- ✓ **गणितीय विचार का क्रम:** ELPS क्रम (Experience, Language, Pictures, Symbols) गणितीय अवधारणाओं को सिखाने का सबसे वैज्ञानिक तरीका है।
- ✓ **संज्ञान (Cognition):** गणितीय सोच के विकास में 'मेटाकोग्निशन' (अपनी ही सोच के बारे में सोचना) महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।
- ✓ **स्थानीय मान (Place Value):** यह गणितीय विचारों में 'आधार-10' प्रणाली और 'शून्य' की अवधारणा के विकास का केंद्र बिंदु है।



Exam Oriented Catch Point

- 🎯 **[तर्क का क्रम]:** याद रखें, गणितीय विकास में 'आगमन' (Induction) पहले आता है और 'निगमन' (Deduction) बाद में।
- 🎯 **[त्रुटियाँ]:** गणितीय विचार के विकास में त्रुटियाँ (Errors) एक खिड़की की तरह होती हैं, जो बताती हैं कि बच्चा कैसे सोच रहा है। ये सीखने का हिस्सा हैं, बाधा नहीं।
- 🎯 **[पदानुक्रम]:** गणित एक संचयी (Cumulative) विषय है; यदि 'योग' का विचार विकसित नहीं हुआ, तो 'गुणा' का विचार कभी स्पष्ट नहीं होगा।



सावधानियां

- ⚠ **[भ्रम]:** गणितीय विचार का विकास केवल 'गणना क्षमता' (Calculation Speed) नहीं है। एक बच्चा जो तेज गणना करता है, जरूरी नहीं कि उसका गणितीय विचार (Logical Thinking) भी उतना ही विकसित हो।
- ⚠ **[अमूर्तन का स्तर]:** छोटे बच्चों को सीधे सूत्र (Formulas) रटाना गणितीय विचार के विकास को रोकता है। विकास हमेशा मूर्त से अमूर्त की ओर होना चाहिए।
- ⚠ **[भाषा का प्रभाव]:** गणित की अपनी एक विशिष्ट भाषा और शब्दावली (जैसे- 'कम से कम', 'अधिकतम', 'शेष') होती है, जिसकी अनदेखी करने पर वैचारिक स्पष्टता नहीं आती।

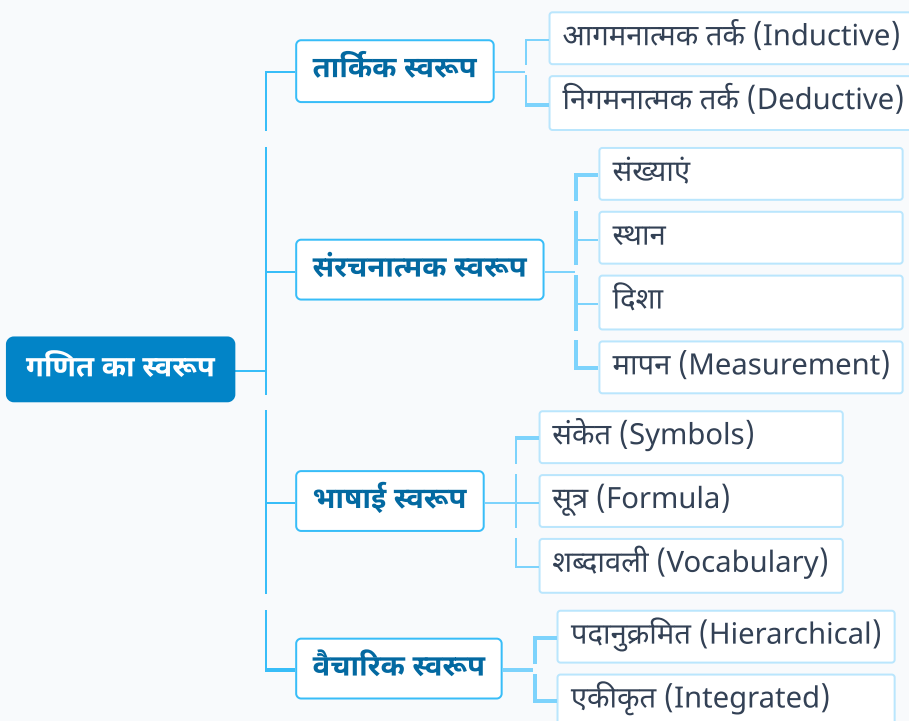
गणित का स्वरूप

(Nature of Mathematics)

गणित की मौलिक प्रकृति

- तार्किकता (Logicality):** गणित पूर्णतः तर्क पर आधारित विषय है। इसमें 'अनुमान' के बजाय 'प्रमाण' और 'तर्क' को प्रधानता दी जाती है।
- अमूर्तता (Abstraction):** गणित के प्रत्यय (Concepts) जैसे संख्या, बिंदु, रेखा आदि अमूर्त होते हैं, जिन्हें मूर्त वस्तुओं (Concrete objects) के माध्यम से समझा जाता है।
- सटीकता (Precision):** गणितीय परिणामों में संदिग्धता नहीं होती। इसमें 'हाँ' या 'नहीं' (सत्य या असत्य) की स्पष्ट स्थिति होती है।
- सार्वभौमिकता (Universality):** गणित के नियम, सिद्धांत और सूत्र स्थान, समय और व्यक्ति के बदलने पर नहीं बदलते (जैसे: $2+2=4$ भारत और अमेरिका दोनों में समान रहेगा)।

गणित की प्रकृति का विस्तृत वर्गीकरण



गणित की महत्वपूर्ण परिभाषाएं

विद्वानों ने गणित के स्वरूप को अपनी परिभाषाओं के माध्यम से स्पष्ट किया है, जो परीक्षा की दृष्टि से अत्यंत महत्वपूर्ण हैं:

प्रसिद्ध विद्वानों के अनुसार गणित की परिभाषा

विद्वान का नाम	परिभाषा का सार (Key Concept)
• लॉक (Locke)	• गणित वह मार्ग है जिसके द्वारा बच्चों के मन या मस्तिष्क में तर्क करने की आदत स्थापित होती है।
• गैलीलियो (Galileo)	• गणित वह भाषा है जिसमें परमेश्वर ने संपूर्ण जगत या ब्रह्मांड को लिख दिया है।

--- जांगड़े प्रकाशन ---

विद्वान का नाम	परिभाषा का सार (Key Concept)
• रोजर बेकन (Roger Bacon)	• गणित सभी विज्ञानों का सिंहद्वार और कुंजी (Gateway and Key) है।
• बर्ट्रैंड रसेल (Bertrand Russell)	• गणित को एक ऐसे विषय के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जिसमें हम यह नहीं जानते कि हम क्या कह रहे हैं और न ही यह कि जो हम कह रहे हैं वह सत्य है।
• बेंजामिन पियर्स (Benjamin Peirce)	• गणित ऐसा विज्ञान है जो आवश्यक निष्कर्ष (Necessary conclusions) निकालता है।
• होग्बेन (Hogben)	• गणित सभ्यता का दर्पण (Mirror of Civili

zation) है।

♦ गणितीय ज्ञान की संरचना एवं शब्दावली

गणित का स्वरूप इसकी विशिष्ट शब्दावली और संरचनात्मक तत्वों से निर्धारित होता है।

◆ गणितीय संरचना के स्तंभ

- **अभिगृहीत (Axioms):** ये वे स्वयंसिद्ध कथन हैं जिन्हें गणित में बिना किसी प्रमाण के सत्य मान लिया जाता है (उदा: एक बिंदु से अनंत रेखाएं गुजर सकती हैं)।
- **साध्य/अनुमान (Conjecture):** ऐसा कथन जिसे सत्य माना जाता है लेकिन अभी तक उसे गणितीय रूप से सिद्ध नहीं किया गया है।
- **प्रमेय (Theorem):** जब किसी साध्य को तार्किक प्रमाणों द्वारा सिद्ध कर दिया जाता है, तो वह प्रमेय बन जाता है।
- **परिभाषा (Definition):** यह किसी पद के अर्थ को स्पष्ट करने के लिए उपयोग किया जाता है।

♦ गणितीय तर्क के प्रकार

गणित की प्रकृति को समझने के लिए उसके तर्क करने के तरीकों को समझना अनिवार्य है:

गणितीय तर्क पद्धति

तर्क का प्रकार	प्रक्रिया	शिक्षण में उपयोग
• आगमनात्मक तर्क (Inductive Reasoning)	• विशिष्ट उदाहरणों से सामान्य नियम की ओर जाना।	• प्राथमिक स्तर पर अवधारणा निर्माण हेतु।
• निगमनात्मक तर्क (Deductive Reasoning)	• सामान्य नियम/सूत्र से विशिष्ट उदाहरण की ओर जाना।	• उच्च प्राथमिक और माध्यमिक स्तर पर समस्या समाधान हेतु।

♦ गणित का पदानुक्रमित स्वरूप (Hierarchical Nature)

गणित एक 'रैखिक' (Linear) विषय नहीं बल्कि एक 'पदानुक्रमित' विषय है। इसका अर्थ है कि: 1. **पूर्व ज्ञान की आवश्यकता:** नई अवधारणा को सीखने के लिए पिछली अवधारणा का ज्ञान अनिवार्य है (उदा: गुणा सीखने के लिए जोड़ का ज्ञान होना आवश्यक है)। 2. **जटिलता का क्रम:** सरल से कठिन की ओर अग्रसर होना। 3. **सर्पिल पाठ्यक्रम (Spiral Curriculum):** गणित के विषयों को बार-बार उच्च स्तर की जटिलता के साथ दोहराया जाता है।

◆ गणित की अपनी भाषा

- **शब्दावली:** पद (Terms), प्रत्यय (Concepts)।
- **व्याकरण:** सूत्र (Formula), सिद्धांत (Principles)।
- **लिपि:** संकेत (Symbols) जैसे $+$, $-$, $\times$, $\div$, Σ , θ आदि।
- यह भाषा **संक्षिप्त, स्पष्ट और त्रुटिहीन** होती है।

🚀 ब्रह्मास्त्र तथ्य

- ✓ गणित को '**विज्ञानों की रानी**' (Queen of Sciences) कहा जाता है (गॉस द्वारा)।
- ✓ गणित का स्वरूप **संवादात्मक (Communicative)** होने के साथ-साथ **प्रतीकात्मक (Symbolic)** भी है।
- ✓ गणित **स्थान, संख्या और मापन** का विज्ञान है।
- ✓ गणित में **अंतर्ज्ञान (Intuition)** और **तर्क** दोनों का महत्व है, लेकिन अंतिम सत्य तर्क से ही सिद्ध होता है।
- ✓ गणित की प्रकृति **वस्तुनिष्ठ (Objective)** होती है, इसमें व्यक्तिपरक (Subjective) विचारों का स्थान नहीं होता।

🎯 Exam Oriented Catch Point

- 🎯 **[पदानुक्रम बनाम रैखिकता]:** गणित पदानुक्रमित (Hierarchical) है, रैखिक (Linear) नहीं। परीक्षा में अक्सर भ्रमित किया जाता है।
- 🎯 **[अमूर्तता का स्तर]:** गणित में जितनी अधिक अमूर्तता होगी, उसकी व्यापकता उतनी ही अधिक होगी।
- 🎯 **[गणितीयकरण]:** NCF-2005 के अनुसार, शिक्षा का मुख्य उद्देश्य बालक की विचार प्रक्रिया का **गणितीयकरण (Mathematization)** करना है, न कि केवल ज्ञान देना।

⚠ सावधानियां

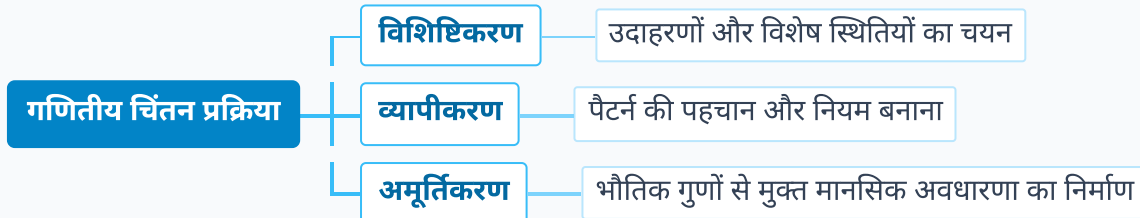
- ⚠ **[भ्रम]:** गणित केवल गणना (Calculation) का विषय है। **[तथ्य]:** गणित केवल गणना नहीं बल्कि तर्क, स्थान और संबंधों का विज्ञान है।
- ⚠ **[अपवाद]:** सभी गणितीय अनुमान सत्य होते हैं। **[सत्य]:** अनुमान (Conjecture) तब तक सत्य नहीं माने जाते जब तक उन्हें प्रमाणित (Proven) न कर दिया जाए।
- ⚠ **[शुद्धता]:** गणितीय भाषा में शब्दों के अर्थ सामान्य भाषा से भिन्न हो सकते हैं (जैसे 'मूल' या 'Root' का गणितीय अर्थ और सामान्य अर्थ अलग है)।

अमूर्तीकरण, विशिष्टिकरण एवं व्यापीकरण

(Abstraction, Specialization, and Generalization)

गणित के शिक्षण और अधिगम (Learning) में 'गणितीय सोच' (Mathematical Thinking) को विकसित करने के लिए तीन प्रक्रियाएं अत्यंत आधारभूत मानी जाती हैं। ये प्रक्रियाएं केवल सिद्धांतों तक सीमित नहीं हैं, बल्कि छात्र के मानसिक मॉडल के निर्माण में मुख्य भूमिका निभाती हैं।

गणितीय चिंतन की वैचारिक संरचना



गणितीय अधिगम का प्रवाह

अधिगम क्रम

प्रत्यक्ष अनुभव (Concrete)

ठोस वस्तुओं के साथ संक्रियाएँ

विशिष्टिकरण

विशेष उदाहरणों का प्रेक्षण (Observation)

व्यापीकरण

पैटर्न के आधार पर नियम का अनुमान

अमूर्तीकरण

बिना भौतिक अस्तित्व के मानसिक प्रतीकों का प्रयोग

♦ विशिष्टिकरण (Specialization)

विशिष्टिकरण वह प्रक्रिया है जिसमें किसी व्यापक विचार या नियम को समझने के लिए कुछ 'विशेष' उदाहरणों (Cases) का सहारा लिया जाता है। यह गणित सीखने का प्रवेश द्वार है।

♦ विशिष्टिकरण के महत्वपूर्ण आयाम

- **अर्थ:** जब हम किसी सामान्य नियम को जाँचने के लिए किसी विशेष संख्या या आकृति का प्रयोग करते हैं, तो वह विशिष्टिकरण है।

- **भूमिका:** यह कठिन और अमूर्त अवधारणाओं को सरल और बोधगम्य बनाता है।
- **उदाहरण:** यदि हमें सिद्ध करना है कि 'दो सम संख्याओं का योग सदैव सम होता है', तो हम $2+4=6$, $8+10=18$ जैसे 'विशिष्ट' उदाहरणों को लेकर देखते हैं।
- **प्रकार:** यह दो प्रकार का हो सकता है - अव्यवस्थित (Random) और व्यवस्थित (Systematic)। व्यवस्थित विशिष्टिकरण में उदाहरणों का चयन एक निश्चित क्रम में किया जाता है ताकि पैटर्न स्पष्ट हो सके।

♦ व्यापीकरण (Generalization)

व्यापीकरण वह प्रक्रिया है जिसमें हम कई विशिष्ट उदाहरणों में मौजूद एक समान गुण या पैटर्न (Pattern) को पहचानकर एक सार्वभौमिक नियम (Universal Rule) प्रतिपादित करते हैं।

♦ व्यापीकरण की कार्यप्रणाली

- **तर्क का आधार:** यह मुख्य रूप से 'आगमनात्मक तर्क' (Inductive Reasoning) पर आधारित होता है।
- **प्रक्रिया:** निरीक्षण → पैटर्न की पहचान → परिकल्पना (Hypothesis) का निर्माण → सामान्य नियम का निर्धारण।
- **उदाहरण:** छात्र देखता है कि $3 + 5 = 8$ (विषम + विषम = सम), $7 + 9 = 16$ (विषम + विषम = सम)। यहाँ से वह व्यापीकरण करता है कि "दो विषम संख्याओं का योग हमेशा सम होता है।"
- **महत्व:** यह गणित में सूत्रों (Formulas) के निर्माण की आधारशिला है।

विशिष्टिकरण और व्यापीकरण में तुलना

तुलना का आधार	विशिष्टिकरण	व्यापीकरण
• दिशा	• सामान्य से विशिष्ट की ओर (General to Particular)	• विशिष्ट से सामान्य की ओर (Particular to General)
• उद्देश्य	• किसी नियम को जाँचना या समझना	• नया नियम या सूत्र खोजना
• मानसिक क्रिया	• उदाहरणों का चयन	• पैटर्न की पहचान और विस्तार
• गणितीय तर्क	• निगमनात्मक (Deductive) की ओर झुकाव	• आगमनात्मक (Inductive) प्रकृति

♦ अमूर्तिकरण (Abstraction)

अमूर्तिकरण गणित की सबसे विशिष्ट विशेषता है। यह वह मानसिक प्रक्रिया है जिसके द्वारा हम किसी वस्तु के भौतिक गुणों (रंग, आकार, वजन) को छोड़कर केवल उसके 'गणितीय गुणों' या 'संबंधों' पर ध्यान केंद्रित करते हैं।

♦ अमूर्तिकरण के प्रमुख तत्व

- **परिभाषा:** भौतिक वस्तुओं के बिना केवल मानसिक स्तर पर विचारों, प्रतीकों (Symbols) और संक्रियाओं के साथ काम करना।
- **उदाहरण (संख्या 5):** जब बच्चा 5 सेब, 5 पेन और 5 गेंदों को देखता है, तो वह 'सेब', 'पेन' या 'गेंद' को भूलकर केवल 'पाँच' (5) की संख्यात्मक अवधारणा को समझता है। यह 'पाँच' का विचार ही अमूर्तिकरण है।
- **सोच का स्तर:** गणित में जैसे-जैसे हम ऊँचे स्तर पर जाते हैं (जैसे बीजगणित), अमूर्तिकरण बढ़ता जाता है। x, y जैसे चरों (Variables) का प्रयोग पूर्णतः अमूर्त है।

- **दार्शनिक आधार:** प्लेटो के अनुसार गणितीय वस्तुएं 'अमूर्त विचार' हैं जो भौतिक जगत से स्वतंत्र हैं।

मूर्त से अमूर्त की विकास यात्रा

स्तर	विवरण	उदाहरण
• मूर्त स्तर (Concrete)	• भौतिक वस्तुओं का उपयोग	• 3 कंकड़ और 2 कंकड़ को मिलाकर गिनना
• अर्ध-मूर्त स्तर (Representational)	• चित्रों या रेखाओं का उपयोग	• कागज़ पर 3 और 2 रेखाएँ खींचकर जोड़ना
• अमूर्त स्तर (Abstract)	• प्रतीकों और अंकों का उपयोग	• सीधे $3 + 2 = 5$ लिखना और समझना

♦ इन तीनों प्रक्रियाओं का अंतर्संबंध (Inter-relationship)

गणित में ये तीनों प्रक्रियाएं एक चक्रीय क्रम में कार्य करती हैं। व्यापीकरण करने के लिए विशिष्टिकरण की आवश्यकता होती है, और जब एक व्यापक नियम बन जाता है, तो उसे प्रतीकों में व्यक्त करना 'अमूर्तिकरण' कहलाता है।

प्रक्रियात्मक चक्र

गणितीय विकास चक्र

विशिष्ट उदाहरण

अवलोकन द्वारा व्यापीकरण



ब्रह्मास्त्र तथ्य

- ✓ **जीन पियाजे:** पियाजे के अनुसार, अमूर्तिकरण (Abstraction) 'औपचारिक संक्रियात्मक अवस्था' (11 वर्ष के बाद) में पूर्णतः विकसित होता है।
- ✓ **आगमनात्मक तर्क:** व्यापीकरण की प्रक्रिया का मूल आधार 'आगमनात्मक तर्क' (Inductive Reasoning) है।
- ✓ **संकेतीकरण:** अमूर्तिकरण का सबसे महत्वपूर्ण उपकरण 'गणितीय भाषा और संकेत' (जैसे $+$, $-$, $\sum$, ∞) हैं।
- ✓ **प्रमाण (Proof):** गणित में किसी व्यापीकरण को तब तक सत्य नहीं माना जाता जब तक उसका अमूर्त तर्क द्वारा प्रमाण न दे दिया जाए।



Exam Oriented Catch Point



[बिंदु 1]: यदि परीक्षा में प्रश्न आए कि "एक छात्र कई त्रिभुजों को मापकर निष्कर्ष निकालता है कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है", तो यह **व्यापीकरण (Generalization)** का उदाहरण है।

🎯[बिंदु 2]: गणित को 'अमूर्त विज्ञान' (Abstract Science) कहा जाता है क्योंकि इसके निष्कर्ष भौतिक प्रयोगों पर नहीं, बल्कि मानसिक तर्क पर आधारित होते हैं।

🎯[बिंदु 3]: प्राथमिक स्तर पर शिक्षण 'मूर्त से अमूर्त' (Concrete to Abstract) की ओर होना चाहिए, जो विशिष्टिकरण से शुरू होकर अमूर्तिकरण तक जाता है।

⚠ सावधानियां

⚠ [भ्रम 1]: **व्यापीकरण बनाम अमूर्तिकरण:** व्यापीकरण का अर्थ है 'नियम बनाना' (जैसे: $a + b = b + a$), जबकि अमूर्तिकरण का अर्थ है 'भौतिकता से दूर मानसिक विचार' (जैसे: संख्या '0' की अवधारणा)। व्यापीकरण अक्सर अमूर्तिकरण की ओर ले जाता है।

⚠ [भ्रम 2]: विशिष्टिकरण केवल छोटे बच्चों के लिए नहीं है; उच्च गणित में भी जटिल प्रमेयों को समझने के लिए विशेषज्ञ (Mathematicians) विशिष्ट उदाहरणों का ही सहारा लेते हैं।

⚠ [भ्रम 3]: व्यापीकरण हमेशा सही नहीं होता (इसे 'अपूर्ण व्यापीकरण' कहते हैं), जब तक कि उसे गणितीय रूप से सिद्ध न किया जाए।

गणित सीखना सिखाना व आकलन

(Mathematics Pedagogy: Learning, Teaching, and Assessment)

भाग 1 - परिचय

गणित शिक्षण शास्त्र (Mathematics Pedagogy) वह विज्ञान एवं कला है जो यह सुनिश्चित करती है कि गणितीय अवधारणाओं को शिक्षार्थियों तक प्रभावी ढंग से कैसे पहुँचाया जाए। इसका मुख्य उद्देश्य बालक की विचार प्रक्रिया का **गणितीयकरण (Mathematization)** करना है। यह केवल संख्यात्मक गणना तक सीमित नहीं है, बल्कि इसमें तार्किक सोच, अमूर्तन (Abstraction) और समस्या समाधान के कौशल विकसित करना शामिल है। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा (NCF 2005) के अनुसार, गणित शिक्षण का मुख्य लक्ष्य बच्चे की उन क्षमताओं का विकास करना है जिससे वह गणितीय रूप से सोच सके और तर्क कर सके।

गणित शिक्षण के उद्देश्य

मुख्य उद्देश्य

तार्किक चिंतन का विकास

गणितीयकरण

समस्या समाधान क्षमता

अमूर्त सोच का निर्माण

[/MINDMAP]

भाग 2 - ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

गणित का शिक्षण प्राचीन भारत से ही अत्यंत व्यवस्थित रहा है। वेदों के समय (विशेषकर शुल्ब सूत्र) से लेकर आधुनिक काल तक, गणित सीखने की विधियों में निरंतर परिवर्तन हुए हैं।

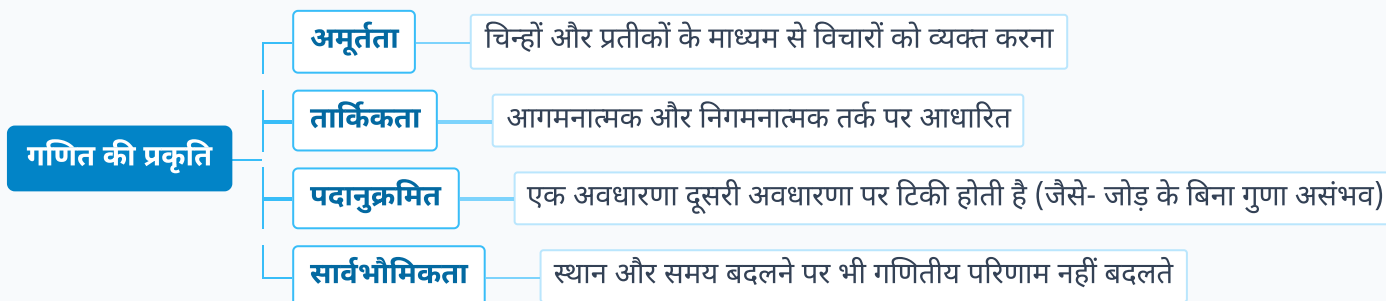
गणित शिक्षण का विकासक्रम

कालखंड	प्रमुख विशेषता / योगदान
• प्राचीन काल (वेदिक)	• 'वेदांग ज्योतिष' के अनुसार गणित का स्थान 'मयूर की शिखा' के समान सर्वोच्च बताया गया।
• मध्य काल	• आर्यभट्ट (दशमलव प्रणाली), ब्रह्मगुप्त और भास्कराचार्य द्वारा बीजगणित और अंकगणित का सरलीकरण।
• आधुनिक काल (स्वतंत्रता पश्चात)	• कोठारी आयोग (1964-66) ने गणित को 10वीं तक अनिवार्य विषय बनाने की अनुशंसा की।
• वर्तमान परिप्रेक्ष्य	• NCF 2005 और NEP 2020: गणित को 'बोझ' के बजाय 'आनंदमयी' और 'परिवेश' से जोड़ने पर बल।

भाग 3 - विस्तृत अध्ययन

गणित की प्रकृति विशिष्ट होती है। यह अन्य विषयों की तुलना में अधिक सोपानिक (Hierarchical) और अमूर्त (Abstract) है।

गणित की प्रकृति एवं संरचना



♦ गणित सीखने-सिखाने की शिक्षण विधियाँ

शिक्षण विधियों का चयन बालक की आयु, मानसिक स्तर और विषय की जटिलता के आधार पर किया जाता है।

प्रमुख गणितीय शिक्षण विधियाँ

विधि का नाम	प्रक्रिया / स्वरूप	उपयोगिता
• आगमन विधि (Inductive)	• विशिष्ट उदाहरणों से सामान्य नियम की ओर (उदाहरण → नियम)।	• प्राथमिक स्तर पर नई अवधारणा विकसित करने हेतु।
• निगमन विधि (Deductive)	• सामान्य नियम से विशिष्ट उदाहरणों की ओर (नियम → उदाहरण)।	• उच्च स्तर पर सूत्रों के अभ्यास और शीघ्र गणना हेतु।
• विश्लेषण विधि (Analysis)	• अज्ञात से ज्ञात की ओर; समस्या को छोटे भागों में तोड़ना।	• कठिन रेखागणितीय प्रमेयों को सिद्ध करने हेतु।
• संश्लेषण विधि (Synthesis)	• ज्ञात से अज्ञात की ओर; खंडों को जोड़कर निष्कर्ष निकालना।	• विश्लेषण के बाद परिणाम को व्यवस्थित करने हेतु।
• प्रयोगशाला विधि (Laboratory)	• 'करके सीखना' (Learning by doing) के सिद्धांत पर आधारित।	• ठोस वस्तुओं के प्रयोग से ज्यामिति और मापन सिखाने हेतु।

◆ सीखने के चरण: ELPS मॉडल

- **E (Experience):** बालक को मूर्त वस्तुओं (Concrete objects) के साथ अनुभव प्रदान करना।
- **L (Language):** अनुभव को भाषा के माध्यम से व्यक्त करना।
- **P (Pictures):** अनुभवों को चित्रों के माध्यम से प्रदर्शित करना।
- **S (Symbols):** अंत में अमूर्त चिन्हों या प्रतीकों (जैसे- +, -, ×) का प्रयोग करना।

♦ गणित में आकलन (Assessment in Mathematics)

आकलन का अर्थ केवल परीक्षा लेना नहीं, बल्कि सीखने की प्रक्रिया में सुधार करना है।

आकलन के प्रकार एवं प्रक्रिया

आकलन तंत्र

रचनात्मक आकलन (Formative)

शिक्षण के दौरान निरंतर प्रतिपुष्टि (Feedback) प्रदान करना

संकलनात्मक आकलन (Summative)

सत्र के अंत में ग्रेड या अंक प्रदान करना

निदानात्मक आकलन (Diagnostic)

सीखने में आने वाली कमियों और त्रुटियों के कारणों का पता लगाना

उपचारात्मक शिक्षण (Remedial)

पहचान की गई कमियों को दूर करने के लिए पुनः शिक्षण करना

गणितीय त्रुटियाँ (Mathematical Errors)

- **लापरवाही जन्य त्रुटियाँ:** ध्यान की कमी या जल्दबाजी के कारण।
- **संकल्पनात्मक त्रुटियाँ (Conceptual):** अवधारणा की समझ न होने के कारण (जैसे- स्थानीय मान न समझना)।
- **प्रक्रियात्मक त्रुटियाँ (Procedural):** सूत्र या चरण गलत लागू करने के कारण।
- **भाषा आधारित त्रुटियाँ:** इबारती सवालों (Word problems) की भाषा न समझ पाना।

भाग 4 - अंतर्संबंध

गणित केवल एक विषय नहीं है, बल्कि यह विज्ञान की सभी शाखाओं का आधार है। इसे **"सभी विज्ञानों का सिंहद्वार और कुंजी" (Gateway and Key to all sciences)** कहा जाता है।

- **विज्ञान के साथ:** भौतिकी के नियम, रसायन के समीकरण और जीवविज्ञान में सांख्यिकी।
- **भूगोल के साथ:** अक्षांश-देशांतर, दूरी, समय और मानचित्रण।
- **अर्थशास्त्र के साथ:** लाभ-हानि, सांख्यिकीय डेटा, ग्राफ और बजट।
- **कला के साथ:** समरूपता (Symmetry), अनुपात और ज्यामितीय आकृतियाँ।

ब्रह्मास्त्र तथ्य

- ✓ **जीन पियाजे:** इनके अनुसार बच्चा सबसे पहले 'संरक्षण' (Conservation) और 'संख्या बोध' सीखता है।
- ✓ **वाइगोत्स्की:** गणित सीखने में 'सामाजिक संवाद' और 'ZPD' की महत्वपूर्ण भूमिका बताई।

- ✓ **पॉल्या (George Polya):** इन्होंने समस्या समाधान के 4 चरण दिए - समझना, योजना बनाना, क्रियान्वयन, और पुनरीक्षण।
- ✓ **वेन हीले (Van Hiele):** ज्यामितीय चिंतन के 5 स्तर दिए (स्तर 0: चक्षुषीकरण, स्तर 1: विश्लेषण, आदि)।
- ✓ **NCF 2005 का विजन:** गणित की शिक्षा ऐसी हो जो 'महत्वाकांक्षी', 'सुसंगत' और 'महत्वपूर्ण' हो।

🎯 Exam Oriented Catch Point

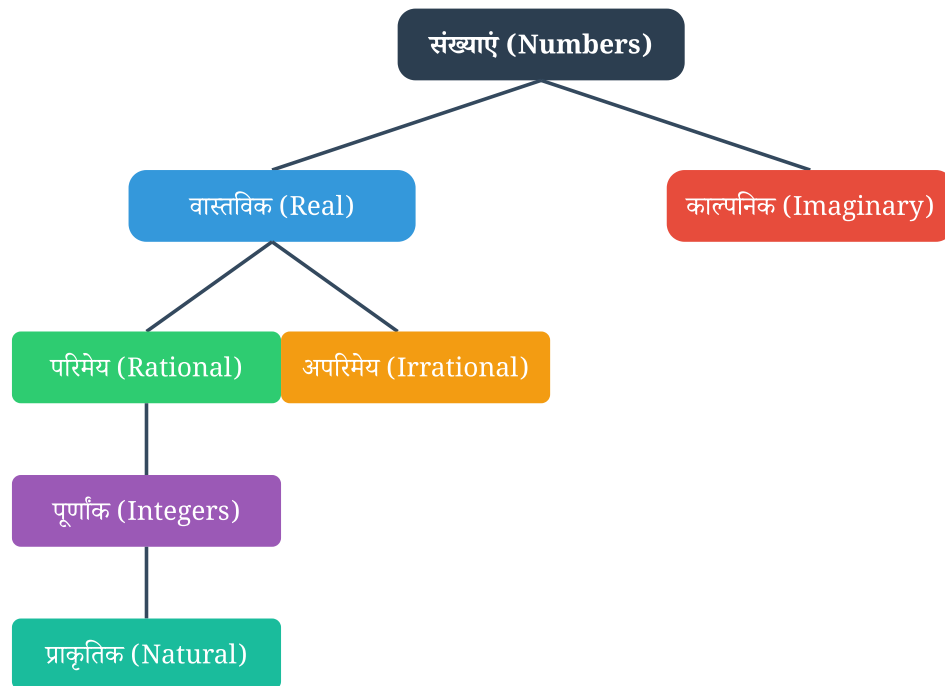
- 🎯 **[त्रुटियाँ]:** शिक्षण शास्त्र में त्रुटियों को 'खिड़कियाँ' माना जाता है, क्योंकि वे बच्चे की सोच को समझने का अवसर देती हैं। इन्हें नकारात्मक नहीं मानना चाहिए।
- 🎯 **[गणितीयकरण]:** यदि प्रश्न में 'गणित का मुख्य लक्ष्य' पूछा जाए, तो उत्तर हमेशा 'बच्चे की सोच का गणितीयकरण' होगा, न कि केवल 'सवाल हल करना'।
- 🎯 **[मूर्त से अमूर्त]:** प्राथमिक स्तर पर शिक्षण हमेशा 'मूर्त' (Physical objects) से शुरू होकर 'अमूर्त' (Formal logic) की ओर जाना चाहिए।

⚠ सावधानियां

- ⚠ **[भ्रम]:** आगमन और निगमन विधि एक-दूसरे की विरोधी नहीं बल्कि पूरक हैं। प्राथमिक स्तर पर आगमन श्रेष्ठ है, पर अभ्यास के लिए निगमन आवश्यक है।
- ⚠ **[आकलन]:** आकलन का उद्देश्य बच्चों को 'पास-फेल' करना या 'लेबल' लगाना नहीं है, बल्कि शिक्षण अधिगम प्रक्रिया में सुधार करना है।
- ⚠ **[लैंगिक रूढ़िवादिता]:** यह धारणा कि "लड़के गणित में लड़कियों से बेहतर होते हैं" पूर्णतः गलत है। गणितीय क्षमता अनुवांशिक नहीं, बल्कि अभ्यास और परिवेश पर निर्भर है।

संख्याएं एवं प्रकार (NUMBERS AND TYPES)

गणित की दुनिया में संख्याओं का आधार बहुत व्यापक है। प्रतियोगी परीक्षाओं की दृष्टि से संख्याओं के वर्गीकरण, उनके गुणों और उनके बीच के संबंधों को



समझना अत्यंत महत्वपूर्ण है।

1. प्राकृतिक संख्याएं (Natural Numbers)

वे संख्याएं जिनका उपयोग वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृतिक संख्याएं कहलाती हैं। इन्हें संकेत N द्वारा दर्शाया जाता है।

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

- सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या 1 है।
- शून्य (0) प्राकृतिक संख्या नहीं है।

दैनिक जीवन का उदाहरण: यदि आप अपनी कक्षा में विद्यार्थियों की गिनती कर रहे हैं, तो आप 1 से शुरू करेंगे। ये प्राकृतिक संख्याएं हैं।

2. पूर्ण संख्याएं (Whole Numbers)

जब प्राकृतिक संख्याओं के समूह में शून्य (0) को भी शामिल कर लिया जाता है, तो वे पूर्ण संख्याएं कहलाती हैं। इन्हें W से दर्शाते हैं।

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

याद रखें: सभी प्राकृतिक संख्याएं पूर्ण संख्याएं होती हैं, लेकिन सभी पूर्ण संख्याएं प्राकृतिक नहीं होतीं (क्योंकि 0 प्राकृतिक नहीं है)।

3. पूर्णांक संख्याएं (Integers)

पूर्ण संख्याओं और ऋणात्मक प्राकृतिक संख्याओं के संग्रह को पूर्णांक कहते हैं। इसे Z या I द्वारा दर्शाया जाता है।

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- धनात्मक पूर्णांक (Positive Integers): $\{1, 2, 3, \dots\}$
- ऋणात्मक पूर्णांक (Negative Integers): $\{-1, -2, -3, \dots\}$
- शून्य (Zero): यह न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक।

4. परिमेय संख्याएं (Rational Numbers)

वे संख्याएं जिन्हें p/q के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

$$Q = \{x | x = p/q, \text{ where } p, q \in Z, q \neq 0\}$$

उदाहरण: $2/3, -5/7, 4, 0, 1.5, 0.333\dots$

5. अपरिमेय संख्याएं (Irrational Numbers)

वे संख्याएं जिन्हें p/q के रूप में नहीं लिखा जा सकता। इनका दशमलव प्रसार 'अशांत अनावर्ती' (Non - terminating Non - repeating) होता है।

उदाहरण: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, 0.101101110\dots$

नोट: π एक अपरिमेय संख्या है, जबकि इसका अनुमानित मान $22/7$ एक परिमेय संख्या है।

6. वास्तविक संख्याएं (Real Numbers)

परिमेय और अपरिमेय संख्याओं के सम्मिलित समूह को वास्तविक संख्याएं कहते हैं। इन्हें R द्वारा दर्शाया जाता है। संख्या रेखा पर प्रत्येक बिंदु एक वास्तविक संख्या को दर्शाता है।

7. सम और विषम संख्याएं (Even and Odd Numbers)

सम संख्या (Even Numbers):

वे संख्याएं जो 2 से पूर्णतः विभाजित हो जाती हैं।

$$E = \{2n | n \in Z\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

विषम संख्या (Odd Numbers):

वे संख्याएं जो 2 से विभाजित नहीं होतीं।

$$O = \{2n \pm 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

8. अभाज्य और भाज्य संख्याएं (Prime and Composite Numbers)

अभाज्य संख्या (Prime Numbers):

वे संख्याएं जिनके केवल दो गुणनखंड (Factors) होते हैं - 1 और वह स्वयं संख्या।

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

- संख्या 2 एकमात्र 'सम अभाज्य' संख्या है।
- 1 न तो अभाज्य है और न ही भाज्य।

भाज्य संख्या (Composite Numbers):

वे संख्याएं जिनके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं।

4, 6, 8, 9, 10, 12, ...

सबसे छोटी भाज्य संख्या 4 है।

9. सह-अभाज्य संख्याएं (Co - prime Numbers)

दो संख्याओं का ऐसा जोड़ा जिनका महत्तम समापवर्तक (HCF) केवल 1 हो।

(2, 3), (5, 9), (16, 25)

10. पूर्णकालिक संख्या (Perfect Number)

यदि किसी संख्या के सभी गुणनखंडों का योग (उस संख्या को छोड़कर) उस संख्या के बराबर हो, तो उसे पूर्णकालिक संख्या कहते हैं।

उदाहरण: 6 के गुणनखंड 1, 2, 3 हैं।

योग: $1 + 2 + 3 = 6$ । अतः 6 एक Perfect Number है।

अगली संख्या 28 है ($1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$)।

11. स्थानीय मान और जातीय मान (Place Value and Face Value)

जातीय मान (Face Value): किसी अंक का अपना स्वयं का मान।

स्थानीय मान (Place Value): अंक की स्थिति (इकाई, दहाई, सैकड़ा) के आधार पर उसका मान।

संख्या 5842 में अंक 8 का:

जातीय मान = 8

स्थानीय मान = $8 \times 100 = 800$

महत्वपूर्ण सूत्र (Important Formulas)

1. प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग: $S = \frac{n(n+1)}{2}$

2. प्रथम n सम संख्याओं का योग: $S = n(n+1)$

3. प्रथम n विषम संख्याओं का योग: $S = n^2$

4. प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग: $S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग: $S = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

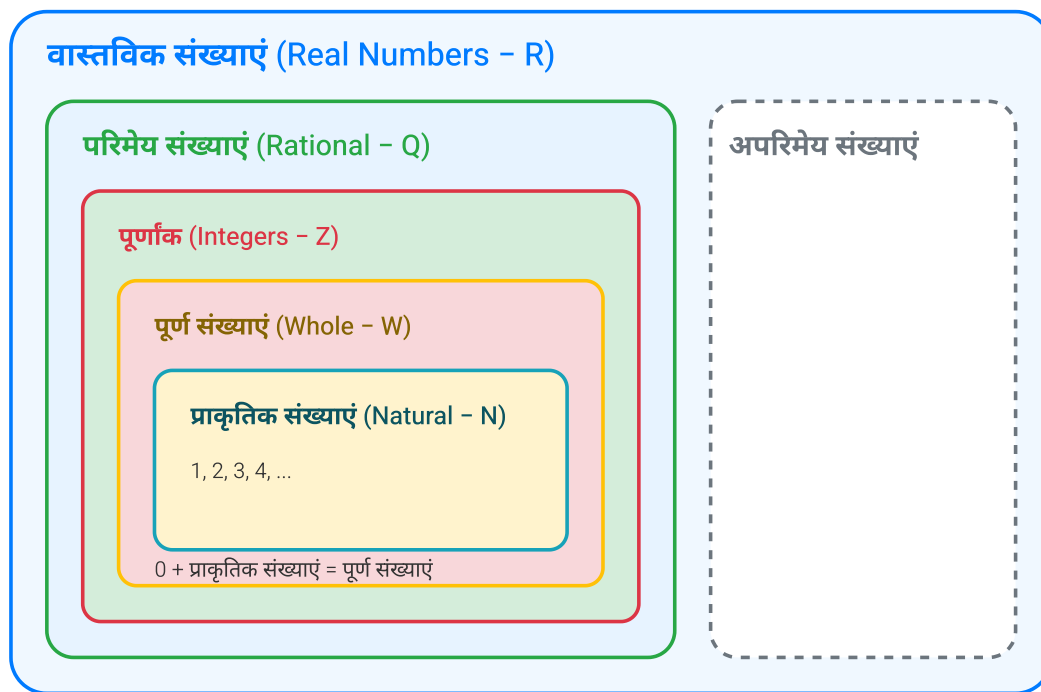
परीक्षा उपयोगी तथ्य:

- 1 से 50 तक कुल 15 अभाज्य संख्याएं होती हैं।
- 51 से 100 तक कुल 10 अभाज्य संख्याएं होती हैं।
- 1 से 100 तक कुल 25 अभाज्य संख्याएं होती हैं।

संख्या पद्धति: संख्याएं एवं उनके प्रकार

संख्या पद्धति (Number System) गणित का आधार है। किसी भी प्रतियोगी परीक्षा में संख्या के प्रकारों और उनके गुणों से संबंधित प्रश्न अनिवार्य रूप से पूछे जाते हैं। नीचे संख्याओं के विभिन्न प्रकारों का विस्तृत विवरण और उन पर आधारित 30 महत्वपूर्ण प्रश्न दिए गए हैं।

संख्याओं का वर्गीकरण (Classification of Numbers)



मुख्य प्रकार:

- प्राकृतिक संख्याएं (Natural Numbers): गणना के लिए प्रयुक्त संख्याएं। $N = \{1, 2, 3, \dots\}$
- पूर्ण संख्याएं (Whole Numbers): शून्य सहित प्राकृतिक संख्याएं। $W = \{0, 1, 2, \dots\}$
- पूर्णांक (Integers): धनात्मक, ऋणात्मक और शून्य का समूह। $Z = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- परिमेय संख्याएं (Rational Numbers): जिन्हें p/q के रूप में लिखा जा सके, जहाँ $q \neq 0$ हो। जैसे: $3/4, 5, -2/7$
- अपरिमेय संख्याएं (Irrational Numbers): जिन्हें p/q के रूप में न लिखा जा सके। जैसे: $\sqrt{2}, \pi, 0.101101110\dots$
- अभाज्य संख्याएं (Prime Numbers): वे संख्याएं जिनके केवल दो गुणनखंड (1 और स्वयं) होते हैं। जैसे: $2, 3, 5, 7, 11, \dots$
- भाज्य संख्याएं (Composite Numbers): वे संख्याएं जिनके 2 से अधिक गुणनखंड होते हैं। जैसे: $4, 6, 8, 9, \dots$

महत्वपूर्ण सूत्र:

1. प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग: $S = \frac{n(n+1)}{2}$
2. प्रथम n सम संख्याओं का योग: $S = n(n+1)$
3. प्रथम n विषम संख्याओं का योग: $S = n^2$
4. प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग: $S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

दैनिक जीवन में उदाहरण: जब आप बाजार से $2kg$ चीनी खरीदते हैं, तो '2' एक प्राकृतिक संख्या है। यदि आपके बैंक खाते में 0 रुपये हैं, तो यह पूर्ण संख्या को दर्शाता है। तापमान का $-5^\circ C$ होना पूर्णांक (Integer) का उदाहरण है।

स्मार्ट ट्रिक: '0' न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक। '1' न तो अभाज्य (Prime) है और न ही भाज्य (Composite)। '2' एकमात्र सम अभाज्य संख्या (Even Prime Number) है।

अभ्यास प्रश्न (30 Questions & Solutions)

प्रश्न 1: सबसे छोटी अभाज्य संख्या (Smallest Prime Number) कौन सी है?

हल: अभाज्य संख्याएं 2 से शुरू होती हैं (2, 3, 5, 7...) क्योंकि 1 का केवल एक ही गुणनखंड है। अतः सबसे छोटी अभाज्य संख्या 2 है।

प्रश्न 2: π (Pi) किस प्रकार की संख्या है?

हल: π एक अपरिमेय (Irrational) संख्या है क्योंकि इसका दशमलव प्रसार (Decimal expansion) अनावर्ती और अशांत (Non-terminating non-recurring) होता है।

प्रश्न 3: प्रथम 50 प्राकृतिक संख्याओं का योग क्या होगा?

हल: सूत्र: $S = \frac{n(n+1)}{2}$

यहाँ $n = 50$

$$S = \frac{50 \times (50+1)}{2} = 25 \times 51 = 1275$$

उत्तर: 1275

प्रश्न 4: क्या सभी पूर्ण संख्याएं (Whole Numbers) प्राकृतिक संख्याएं होती हैं?

हल: नहीं। '0' एक पूर्ण संख्या है लेकिन प्राकृतिक संख्या नहीं है। हालांकि, सभी प्राकृतिक संख्याएं पूर्ण संख्याएं होती हैं।

प्रश्न 5: 1 से 100 के बीच कितनी अभाज्य संख्याएं (Prime Numbers) होती हैं?

हल: 1 से 100 के बीच कुल 25 अभाज्य संख्याएं होती हैं।

प्रश्न 6: दो अंकों की सबसे छोटी अभाज्य संख्या कौन सी है?

हल: दो अंकों की संख्याएं 10 से शुरू होती हैं। 10 भाज्य है, उसके बाद 11 अभाज्य है। अतः उत्तर 11 है।

प्रश्न 7: संख्या 0.333... (या $0.\overline{3}$) परिमेय है या अपरिमेय?

हल: यह परिमेय (Rational) है क्योंकि इसे $\frac{1}{3}$ के रूप में लिखा जा सकता है। आवर्ती दशमलव हमेशा परिमेय होते हैं।

प्रश्न 8: प्रथम 20 विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

हल: सूत्र: $S = n^2$

यहाँ $n = 20$

$$S = 20^2 = 400$$

उत्तर: 400

प्रश्न 9: वह संख्या जो न तो भाज्य है और न ही अभाज्य?

हल: संख्या 1 का केवल एक गुणनखंड होता है, इसलिए यह न तो अभाज्य है और न ही भाज्य।

प्रश्न 10: -5 और 5 के बीच कितने पूर्णांक (Integers) हैं?

हल: संख्याएं हैं: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

कुल गणना = 9

प्रश्न 11: $\sqrt{16}$ किस प्रकार की संख्या है?

हल: $\sqrt{16} = 4$ । चूँकि 4 एक पूर्णांक है, इसलिए यह एक परिमेय (Rational) संख्या है।

प्रश्न 12: प्रथम 10 सम संख्याओं का योग क्या होगा?

हल: सूत्र: $S = n(n + 1)$

$S = 10 \times (10 + 1) = 10 \times 11 = 110$

उत्तर: 110

प्रश्न 13: सह-अभाज्य (Co - prime) संख्याएं क्या होती हैं?

हल: ऐसी दो संख्याएं जिनका महत्तम समापवर्तक (HCF) 1 हो। जैसे: (8, 9), (5, 7)।

प्रश्न 14: $0/5$ का मान क्या है और यह कैसी संख्या है?

हल: $0/5 = 0$ । यह एक परिमेय संख्या और पूर्ण संख्या है।

प्रश्न 15: $5/0$ का मान क्या होगा?

हल: किसी भी संख्या को शून्य से भाग देने पर उत्तर अपरिभाषित (Undefined) या अनंत (∞) होता है।

प्रश्न 16: 70 से छोटी अभाज्य संख्याएं कितनी हैं?

हल: अभाज्य संख्याएं: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67।

कुल गिनती = 19

प्रश्न 17: प्रथम 5 प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग ज्ञात करें।

हल: सूत्र: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n = 5 \implies \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 55$

उत्तर: 55

प्रश्न 18: क्या शून्य (0) एक परिमेय संख्या है?

हल: हाँ, क्योंकि इसे $0/1$ के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ $p = 0, q = 1$ (दोनों पूर्णांक हैं और $q \neq 0$)।

प्रश्न 19: तीन अंकों की सबसे छोटी अभाज्य संख्या कौन सी है?

हल: 101। (100 भाज्य है, 101 के केवल दो गुणनखंड हैं)।

प्रश्न 20: यदि n एक सम संख्या है, तो $n(n + 1)(n + 2)$ हमेशा किससे विभाज्य होगा?

हल: माना $n = 2$ (न्यूनतम सम संख्या), तब $2 \times 3 \times 4 = 24$

अतः यह हमेशा 24 से विभाज्य होगा।

प्रश्न 21: 1 से 20 तक की सभी अभाज्य संख्याओं का योग क्या है?

हल: $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 = 77$

उत्तर: 77

प्रश्न 22: पूर्ण कालिक संख्या (Perfect Number) किसे कहते हैं? उदाहरण दें।

हल: वह संख्या जिसके गुणनखंडों का योग (संख्या को छोड़कर) उस संख्या के बराबर हो।

उदाहरण: 6 (गुणनखंड: 1, 2, 3 $\implies 1 + 2 + 3 = 6$)।

प्रश्न 23: x एक ऋणात्मक पूर्णांक है, तो $-x$ क्या होगा?

हल: यदि x ऋणात्मक है (जैसे -3), तो $-(-3) = 3$ । अतः $-x$ हमेशा धनात्मक (Positive) होगा।

प्रश्न 24: प्रथम 5 अभाज्य संख्याओं का औसत क्या है?

हल: संख्याएं: 2, 3, 5, 7, 11

योग: $2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 28$

औसत: $28/5 = 5.6$

प्रश्न 25: दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी परिमेय संख्याएं हो सकती हैं?

हल: किन्हीं भी दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत (Infinite) परिमेय संख्याएं होती हैं।

प्रश्न 26: सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक (Smallest Positive Integer) क्या है?

हल: धनात्मक पूर्णांक 1 से शुरू होते हैं, अतः उत्तर 1 है।

प्रश्न 27: संख्या $22/7$ परिमेय है या अपरिमेय?

हल: $22/7$ परिमेय है क्योंकि यह p/q के रूप में है। (ध्यान दें: यह π का अनुमानित मान है, वास्तविक नहीं)।

प्रश्न 28: 1 से 50 तक कितनी भाज्य (Composite) संख्याएं हैं?

हल: 1 से 50 तक कुल 50 संख्याएं हैं। अभाज्य = 15, '1' न तो भाज्य न अभाज्य।

भाज्य = $50 - 15 - 1 = 34$ ।

प्रश्न 29: यदि a और b दो विषम संख्याएं हैं, तो $a + b$ हमेशा क्या होगी?

हल: विषम + विषम = सम। जैसे $3 + 5 = 8$ । अतः $a + b$ हमेशा सम (Even) होगी।

प्रश्न 30: प्रथम 4 पूर्ण संख्याओं (Whole Numbers) का योग क्या है?

हल: पूर्ण संख्याएं 0 से शुरू होती हैं: 0, 1, 2, 3

योग: $0 + 1 + 2 + 3 = 6$

संख्या पद्धति: भाज्य-अभाज्य, क्रम एवं स्थानीय मान

1. स्थानीय मान (Place Value) एवं जातीय मान (Face Value)

भारतीय संख्या प्रणाली में किसी अंक का मान उसके स्थान पर निर्भर करता है।

जातीय मान (Face Value):

किसी अंक का जातीय मान स्वयं वही अंक होता है, चाहे वह किसी भी स्थान पर हो। इसे 'अंकित मान' भी कहते हैं।

स्थानीय मान (Place Value):

किसी अंक का स्थानीय मान उसके स्थान (इकाई, दहाई, सैकड़ा आदि) के अनुसार बदलता रहता है।

$$\text{स्थानीय मान (Place Value)} = \text{Digit} \times \text{Value of the place}$$

स्थानीय मान तालिका (Place Value Chart):

10,000	1,000	100	10	1
दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

उदाहरण: संख्या 5,432 में 4 का स्थानीय मान और जातीय मान बताएं।

हल: 4 सैकड़ा के स्थान पर है, इसलिए स्थानीय मान $= 4 \times 100 = 400$ | जातीय मान $= 4$

2. भाज्य और अभाज्य संख्याएं (Prime and Composite Numbers)

अभाज्य संख्या (Prime Number):

वे प्राकृतिक संख्याएं जो केवल 1 और स्वयं से विभाजित होती हैं, अभाज्य संख्याएं कहलाती हैं। इनके केवल 2 गुणनखंड होते हैं।

1 न तो भाज्य है और न ही अभाज्य। 2 सबसे छोटी और एकमात्र 'सम' अभाज्य संख्या है।

भाज्य संख्या (Composite Number):

वे प्राकृतिक संख्याएं जिनके 2 से अधिक गुणनखंड होते हैं, भाज्य संख्याएं कहलाती हैं।

अभाज्य संख्या की जाँच के लिए: $\sqrt{n}$ से छोटी सभी अभाज्य संख्याओं से n को विभाजित करके देखें।

व्यावहारिक उपयोग: साइबर सुरक्षा और क्रिप्टोग्राफी (जैसे बैंक के पासवर्ड) में बहुत बड़ी अभाज्य संख्याओं का उपयोग डेटा को एनकोड करने के लिए किया जाता है ताकि उसे हैक करना लगभग असंभव हो।

3. आरोही और अवरोही क्रम (Ascending and Descending Order)

आरोही क्रम (Ascending Order):

संख्याओं को छोटे से बड़े क्रम में लिखना। (बढ़ता क्रम)

$$Smallest < \dots < Largest$$

अवरोही क्रम (Descending Order):

संख्याओं को बड़े से छोटे क्रम में लिखना। (घटता क्रम)

$$Largest > \dots > Smallest$$

प्रतियोगी परीक्षाओं हेतु 25 महत्वपूर्ण प्रश्न एवं हल

प्रश्न 1: संख्या 7, 56, 482 में अंक '5' के स्थानीय मान और जातीय मान का अंतर क्या है?

हल: 5 का स्थानीय मान = 50, 000, 5 का जातीय मान = 5

अंतर = $50,000 - 5 = 49,995$

प्रश्न 2: प्रथम 5 अभाज्य संख्याओं का औसत क्या है?

हल: प्रथम 5 अभाज्य संख्याएं = 2, 3, 5, 7, 11

योग = $2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 28$

औसत = $28/5 = 5.6$

प्रश्न 3: निम्न में से कौन-सी संख्या अभाज्य है? (A) 91 (B) 87 (C) 97 (D) 81

हल: (C) 97

विवरण: $91 = 13 \times 7$, $87 = 29 \times 3$, $81 = 9 \times 9$ । 97 का कोई अन्य गुणनखंड नहीं है।

प्रश्न 4: 0.5, 0.05, 0.55, 0.005 को आरोही क्रम में व्यवस्थित करें।

हल: आरोही क्रम (छोटे से बड़ा): $0.005 < 0.05 < 0.5 < 0.55$

प्रश्न 5: संख्या 9, 87, 654 में '8' और '6' के स्थानीय मानों का योग ज्ञात करें।

हल: 8 का स्थानीय मान = 80, 000, 6 का स्थानीय मान = 600

योग = $80,000 + 600 = 80,600$

प्रश्न 6: 1 से 50 तक कितनी अभाज्य संख्याएं होती हैं?

हल: 15 अभाज्य संख्याएं: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

प्रश्न 7: निम्न भिन्नो को अवरोही क्रम में लिखें: $2/3$, $5/6$, $3/4$

हल: दशमलव रूप में बदलने पर: $2/3 \approx 0.66$, $5/6 \approx 0.83$, $3/4 = 0.75$

अवरोही क्रम: $5/6 > 3/4 > 2/3$

प्रश्न 8: दो अंकों की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या कौन-सी है?

हल: 97

प्रश्न 9: संख्या 345.678 में 7 का स्थानीय मान क्या है?

हल: 7 सौवें (hundredths) स्थान पर है।

स्थानीय मान = $7/100 = 0.07$

प्रश्न 10: 10 और 20 के बीच की सभी अभाज्य संख्याओं का योग कितना है?

हल: अभाज्य संख्याएं = 11, 13, 17, 19

योग = $11 + 13 + 17 + 19 = 60$

प्रश्न 11: क्या 1 एक भाज्य संख्या है?

हल: नहीं, 1 न तो भाज्य है और न ही अभाज्य, क्योंकि इसका केवल 1 ही गुणनखंड है।

प्रश्न 12: 'सह-अभाज्य' (Co - prime) संख्याएं क्या होती हैं? उदाहरण दें।

हल: वे संख्याएं जिनका महत्तम समापवर्तक (HCF) 1 हो।

उदाहरण: (8, 15) क्योंकि इनमें 1 के अलावा कोई कॉमन गुणनखंड नहीं है।

प्रश्न 13: 4 अंकों की सबसे छोटी भाज्य संख्या कौन-सी है?

हल: 1000 (क्योंकि इसके 2 से अधिक गुणनखंड हैं)।

प्रश्न 14: संख्या 8, 07, 432 में 0 का स्थानीय मान क्या है?

हल: 0 का स्थानीय मान किसी भी स्थान पर हमेशा 0 ही होता है।

प्रश्न 15: यदि P एक अभाज्य संख्या है और $P > 3$ है, तो $P^2 - 1$ हमेशा किससे विभाजित होगा?

हल: 24 से।

उदाहरण: यदि $P = 5$, तो $5^2 - 1 = 24$ । यदि $P = 7$, तो $7^2 - 1 = 48$ (जो 24 से विभाज्य है)।

प्रश्न 16: अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$

हल: $\sqrt{2} = 2^{1/2} = 2^{6/12} = \sqrt[12]{64}$

$\sqrt[3]{3} = 3^{1/3} = 3^{4/12} = \sqrt[12]{81}$

$\sqrt[4]{4} = 4^{1/4} = 4^{3/12} = \sqrt[12]{64}$

अवरोही क्रम: $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$

प्रश्न 17: 'जुड़वां अभाज्य' (Twin Primes) का एक जोड़ा बताएं।

हल: अभाज्य संख्याओं का वह जोड़ा जिनके बीच 2 का अंतर हो।

उदाहरण: (3, 5), (11, 13), (17, 19)

प्रश्न 18: 5, 0, 3 अंकों से बनी 3 अंकों की सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्या का अंतर क्या है?

हल: सबसे बड़ी संख्या = 530 | सबसे छोटी संख्या = 305 (0 आगे नहीं रख सकते)

अंतर = $530 - 305 = 225$

प्रश्न 19: 1 से 100 तक कितनी भाज्य संख्याएं (Composite numbers) हैं?

हल: कुल संख्याएं = 100

अभाज्य संख्याएं (1 से 100) = 25

संख्या '1' (न भाज्य न अभाज्य) = 1

भाज्य संख्याएं = $100 - (25 + 1) = 74$

प्रश्न 20: संख्या 27, 396 में 7 के स्थानीय मान और 9 के जातीय मान का गुणनफल क्या होगा?

हल: 7 का स्थानीय मान = 7000 | 9 का जातीय मान = 9

गुणनफल = $7000 \times 9 = 63,000$

प्रश्न 21: निम्न में से कौन-सी संख्या अभाज्य नहीं है? (A) 31 (B) 61 (C) 71 (D) 91

हल: (D) 91

क्योंकि $91 = 7 \times 13$, अतः यह एक भाज्य संख्या है।

प्रश्न 22: $3/5$, $4/7$, $8/9$ में सबसे बड़ी भिन्न कौन-सी है?

हल: $3/5 = 0.60$, $4/7 \approx 0.57$, $8/9 \approx 0.88$

सबसे बड़ी भिन्न = $8/9$

प्रश्न 23: तीन अंकों की सबसे छोटी अभाज्य संख्या कौन-सी है?

हल: 101

प्रश्न 24: किसी संख्या में इकाई के स्थान का स्थानीय मान और जातीय मान हमेशा _____ होता है।

हल: 'समान' (जैसे 543 में 3 का स्थानीय मान 3 और जातीय मान भी 3 है)।

प्रश्न 25: प्रथम सम अभाज्य संख्या और प्रथम विषम अभाज्य संख्या का गुणनफल क्या है?

हल: प्रथम सम अभाज्य = 2 | प्रथम विषम अभाज्य = 3

गुणनफल = $2 \times 3 = 6$

भिन्न (FRACTION)

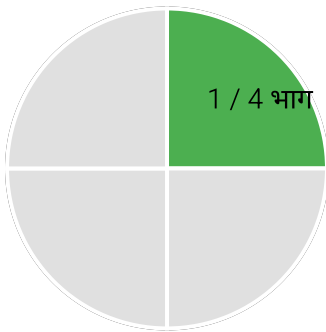
गणित में, **भिन्न (Fraction)** वह संख्या है जो किसी संपूर्ण (Whole) के एक भाग को दर्शाती है। यह दो पूर्ण संख्याओं के अनुपात के रूप में व्यक्त की जाती है।

किसी भिन्न का मानक रूप:

$$\text{Fraction} = \frac{\text{Numerator (अंश)}}{\text{Denominator (हर)}} = \frac{p}{q}$$

जहाँ $q \neq 0$

- **अंश (Numerator):** यह बताता है कि कुल कितने भाग लिए गए हैं।
- **हर (Denominator):** यह बताता है कि किसी वस्तु को कुल कितने बराबर भागों में विभाजित किया गया है।



चित्र: एक वृत्त का 1 / 4 भाग (हरा रंग) दर्शाया गया है।

भिन्नों के प्रकार (Types of Fractions)

1. उचित भिन्न (Proper Fraction)

यदि किसी भिन्न का अंश, उसके हर से छोटा हो, तो उसे उचित भिन्न कहते हैं। इसका मान सदैव 1 से कम होता है।

$$\text{Numerator} < \text{Denominator}$$

उदाहरण: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{17}$

2. अनुचित भिन्न (Improper Fraction)

यदि किसी भिन्न का अंश, उसके हर से बड़ा या बराबर हो, तो उसे अनुचित भिन्न कहते हैं। इसका मान 1 या 1 से अधिक होता है।

$$\text{Numerator} \geq \text{Denominator}$$

$$\text{उदाहरण: } \frac{7}{4}, \frac{15}{7}, \frac{9}{9}$$

3. मिश्रित भिन्न (Mixed Fraction)

एक पूर्णांक और एक उचित भिन्न के मिश्रण को मिश्रित भिन्न कहते हैं।

$$\text{Integer} + \text{Proper Fraction}$$

$$\text{उदाहरण: } 3\frac{1}{2}, 5\frac{2}{7}$$

$$\text{रूपांतरण सूत्र: } A\frac{b}{c} = \frac{(A \times c) + b}{c}$$

4. तुल्य भिन्न (Equivalent Fractions)

वे भिन्न जिनका मान समान होता है, भले ही उनके अंश और हर अलग-अलग हों।

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}$$

5. दशमलव भिन्न (Decimal Fraction)

वे भिन्न जिनके हर में 10 की घात (10, 100, 1000 आदि) होती है।

$$\frac{7}{10} = 0.7, \frac{13}{100} = 0.13$$

भिन्नों की तुलना (Comparison of Fractions)

प्रतियोगी परीक्षाओं में सबसे महत्वपूर्ण हिस्सा भिन्नों की तुलना करना है। इसके लिए निम्नलिखित नियम अत्यंत उपयोगी हैं:

ट्रिक 1: हर समान होने पर

यदि दो भिन्नों के हर समान हों, तो बड़े अंश वाली भिन्न बड़ी होती है।

$$\frac{7}{11} > \frac{5}{11}$$